



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

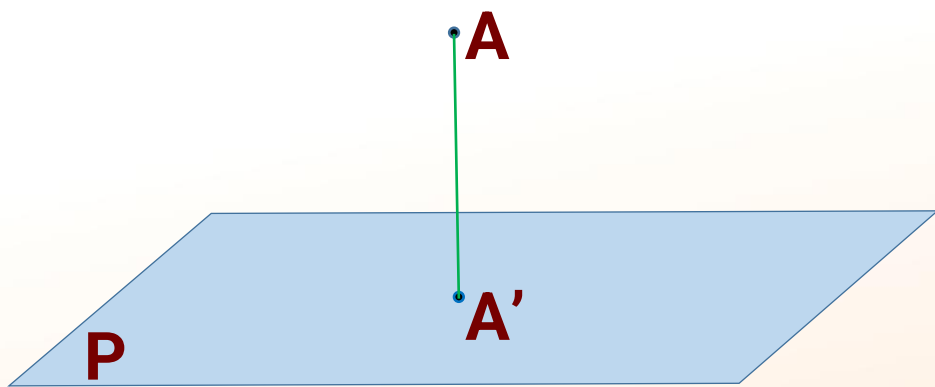
DISTANCIA ENTRE RECTAS
CRUZADAS

CICLO
PRE
2024-1



PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO

Definición. La proyección ortogonal de un punto sobre un plano, es el pie de la perpendicular trazada desde el punto, al plano.



Si A es un punto exterior al plano P,

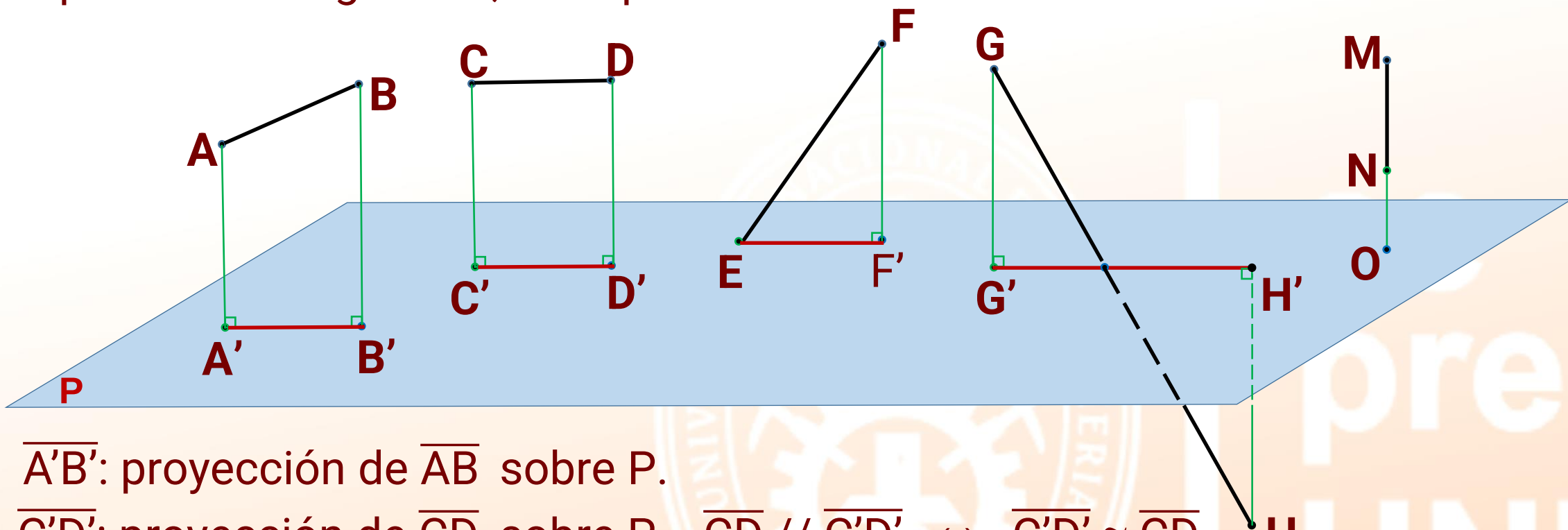
$\overline{AA'} \perp P$ y $A' \in P$, entonces

A' es la proyección ortogonal del punto A, sobre el plano P.

$\overline{AA'}$ es la proyectante del punto A.

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN SEGMENTO SOBRE UN PLANO

Definición. Es el conjunto formado por las proyecciones de todos los puntos del segmento, en el plano.



$\overline{A'B'}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre P .

$\overline{C'D'}$: proyección de $\overline{CD}$ sobre P . $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'} \Leftrightarrow \overline{C'D'} \cong \overline{CD}$

$\overline{EF'}$: proyección de $\overline{EF}$ sobre P .

$\overline{G'H'}$: proyección de $\overline{GH}$ sobre P .

$\overline{MN} \perp P \Leftrightarrow O$, proyección de $\overline{MN}$ sobre P .

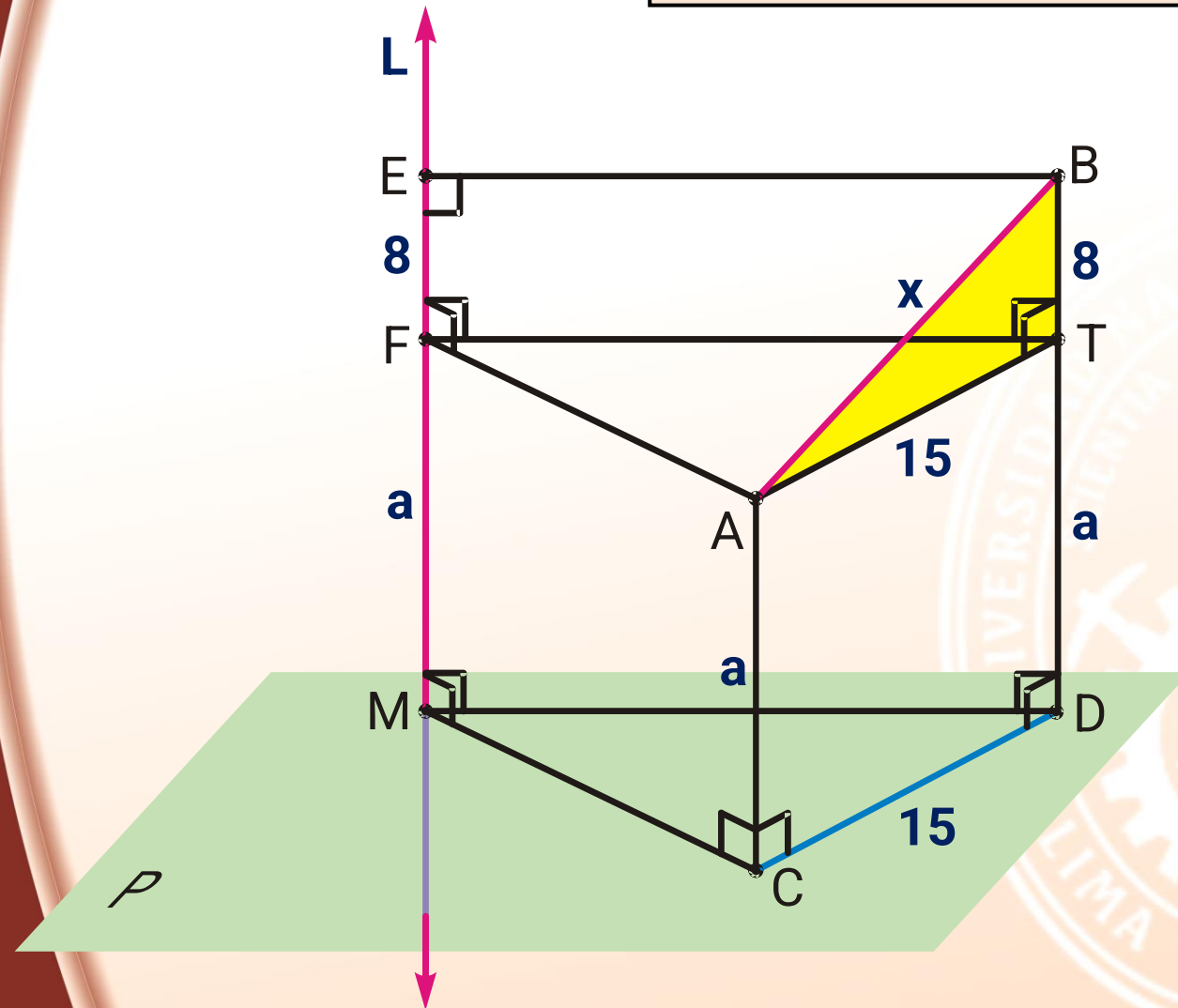
EJERCICIO 01

Un segmento $\overline{AB}$ se proyecta sobre un plano P y sobre una recta L , donde L es perpendicular a P . Si las proyecciones miden 15 u y 8 u respectivamente, entonces la longitud (en u) de $\overline{AB}$ es:

- A) 17 B) 18 C) 20 D) 21 E) 25

Resolución 01

Un segmento $\overline{AB}$ se proyecta sobre un plano P y sobre una recta L , donde L es perpendicular a P . Si las proyecciones miden 15 u y 8 u respectivamente, entonces la longitud (en u) de $\overline{AB}$ es:



Se trazan las proyectantes desde A y B , al plano P y a la recta L .

ACMF: rectángulo

$$MF = AC = a$$

$$\overline{FT} \perp \overline{BD} \Rightarrow BT = EF = 8$$

EBDM: rectángulo

$$BD = EM = 8 + a \Rightarrow TD = a$$

ATDC: rectángulo

$$AT = CD = 15$$

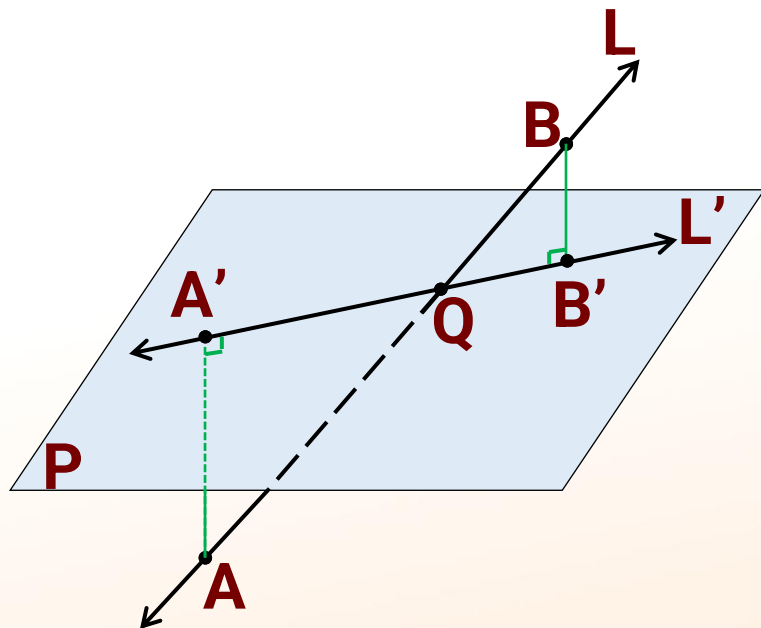
$$\triangle ATB: x^2 = 8^2 + (15)^2$$

$$\therefore x = 17$$

Clave: A

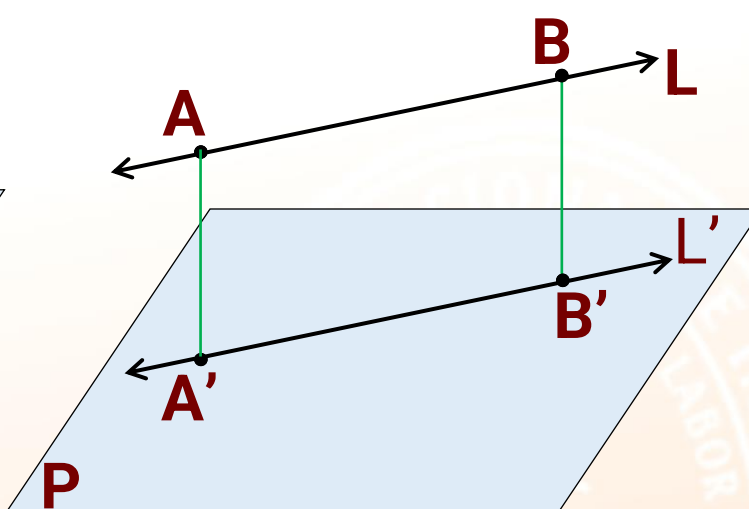
PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO

Definición. La proyección ortogonal de una recta sobre un plano, es el conjunto formado por las proyecciones de todos los puntos de la recta, sobre el plano.



$$L \cap P = \{Q\};$$

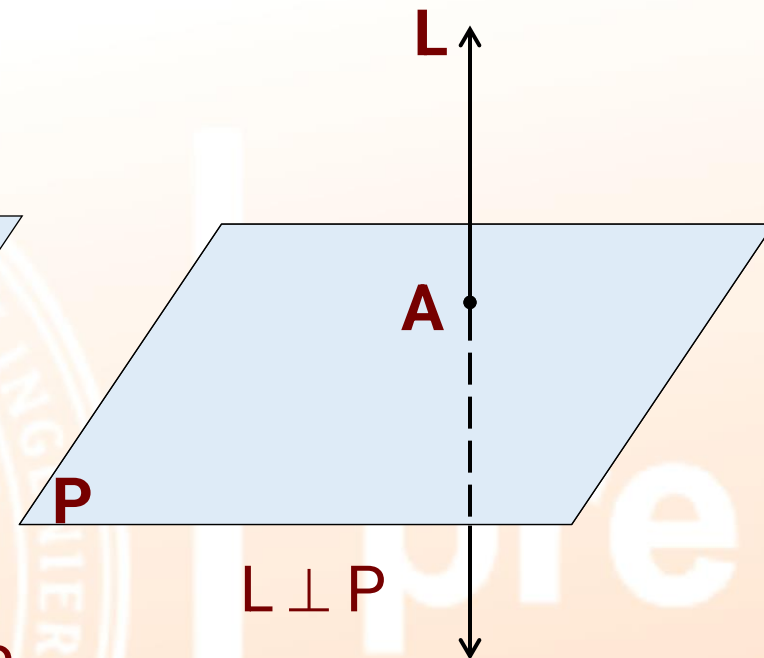
L' : proyección de L sobre P .



$$L // P$$

L' : proyección de L sobre P .

$$L' // L$$



$$L \perp P$$

A : proyección de L sobre P .

EJERCICIO 02

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. La proyección ortogonal de un segmento sobre un plano, es otro segmento.
- II. Si las proyecciones ortogonales de las rectas L_1 y L_2 , sobre un plano P , son dos rectas secantes, entonces L_1 y L_2 son secantes.
- III. La proyección ortogonal de una poligonal sobre un plano, es un segmento.

A) VVF B) FFF C) FFV D) VVV E) VFV

Resolución 02

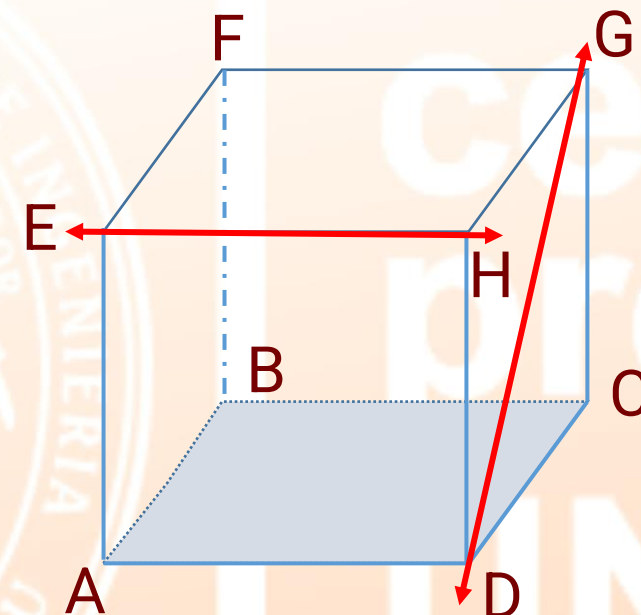
Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. La proyección ortogonal de un segmento sobre un plano, es otro segmento.
- II. Si las proyecciones ortogonales de las rectas L_1 y L_2 , sobre un plano P , son dos rectas secantes, entonces L_1 y L_2 son secantes.
- III. La proyección ortogonal de una poligonal sobre un plano, es un segmento.

Sea ABCD el plano de proyección:

- I. La proyección de $\overline{EA}$ es el punto A
FALSO
- II. Las proyecciones de las rectas cruzadas $\overleftrightarrow{EH}$ y $\overleftrightarrow{GD}$, son las rectas secantes $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.
FALSO
- III. La proyección de la poligonal AFGD no es un segmento.
FALSO

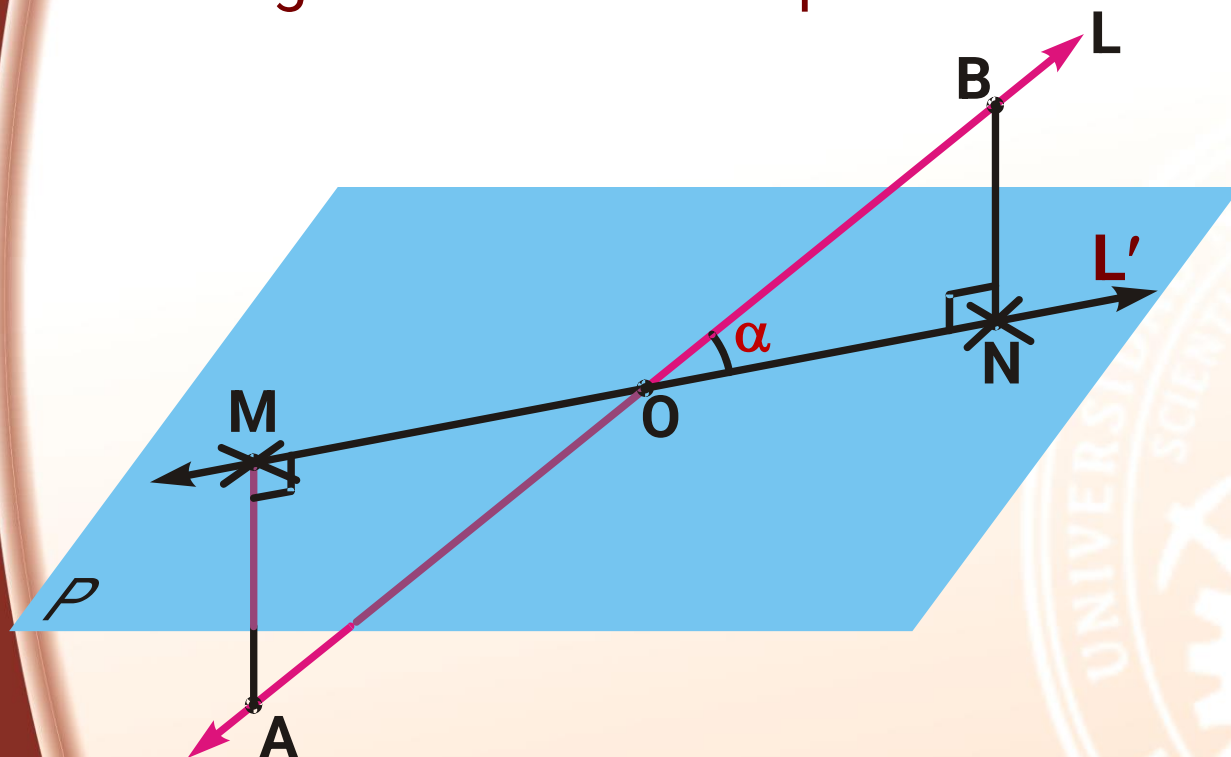
Rpta: **FFF**



Clave: B

ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Definición. El ángulo entre una recta y un plano secante, no perpendiculares, es el ángulo determinado por la recta y su proyección ortogonal sobre dicho plano.



Sea L una recta secante al plano P , en O y L' su proyección ortogonal en el plano.

El ángulo BON es el ángulo entre la recta L y el plano P .

$$m\angle BON = \alpha$$

EJERCICIO 03

Desde un punto A exterior a un plano P, se trazan las rectas $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{AN}$, que determinan con el plano, ángulos cuyas medidas son 30 y 45 respectivamente (M y N pertenecen al plano). Si $AM = k$, entonces la longitud de $\overline{AN}$ es

A) $\frac{3k}{\sqrt{2}}$

B) $\frac{5k}{\sqrt{2}}$

C) $\frac{k\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{k}{\sqrt{5}}$

E) $\frac{k}{\sqrt{3}}$

RESOLUCIÓN 03

Desde un punto A exterior a un plano P, se trazan las rectas $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{AN}$, que determinan con el plano, ángulos cuyas medidas son 30 y 45 respectivamente (M y N pertenecen al plano). Si $AM = k$, entonces la longitud de $\overline{AN}$ es

Se proyectan los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$ sobre el plano P

$$m\angle AMB = 30 \text{ y } m\angle ANB = 45$$

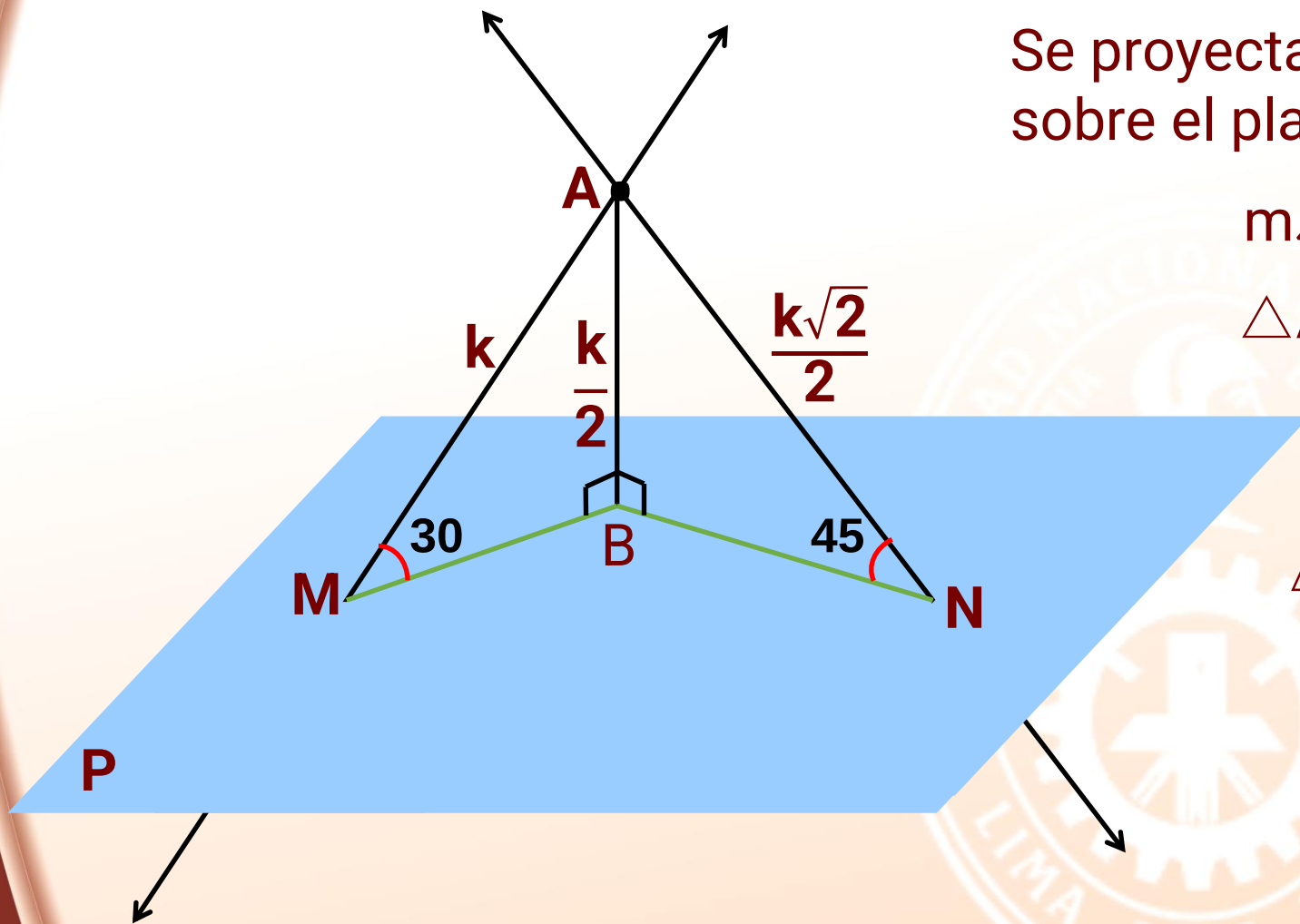
$\triangle ABM$, es notable de 30 y 60

$$AB = \frac{k}{2}$$

$\triangle ABN$, es notable de 45 y 45

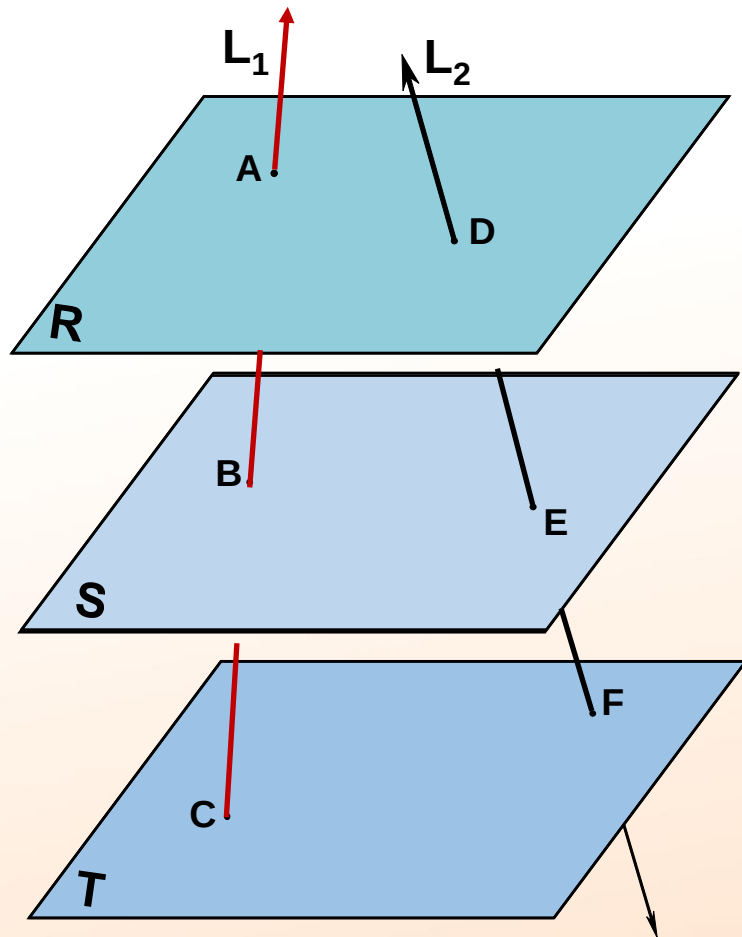
$$\therefore AN = \frac{k\sqrt{2}}{2}$$

Clave: C



TEOREMA DE THALES EN EL ESPACIO

Tres o más planos paralelos entre sí, determinan en dos rectas secantes a ellos, segmentos proporcionales.



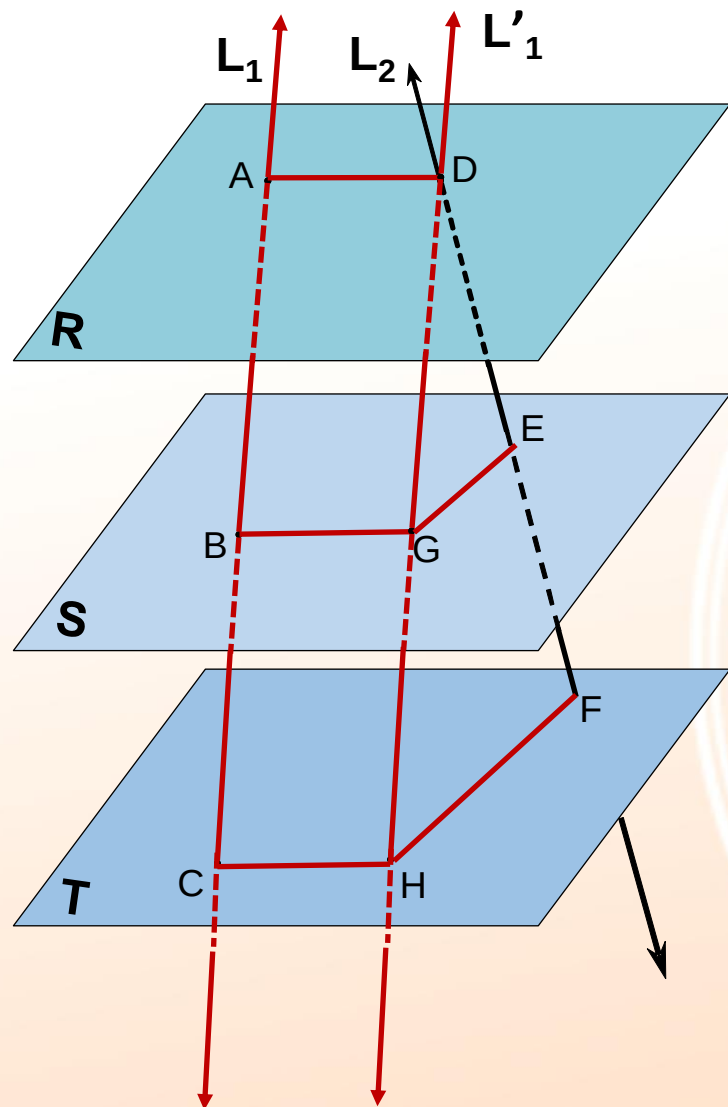
Sean $R \parallel S \parallel T$

L_1 y L_2 , rectas secantes a dichos planos, en los puntos A, B, C, ... F, respectivamente.

Se cumple:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

DEMOSTRACIÓN



Sea $L'_1 \parallel L_1$

En el plano determinado por L'_1 y L_1 :

$$\overline{BG} \parallel \overline{AD} \parallel \overline{CH}$$

Plano DHF: $\overline{GE} \parallel \overline{HF}$

Teorema de Thales, en $\triangle HDF$:

$$\frac{DG}{GH} = \frac{DE}{EF} \dots (1)$$

ABGD y BCHG, paralelogramos:

$$DG = AB \text{ y } GH = BC$$

En (1):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

EJERCICIO 04

Se tienen los planos paralelos P , Q y R . Se trazan las rectas L_1 , L_2 y L_3 secantes a dichos planos; L_1 interseca a P , Q y R en los puntos A , B y C respectivamente; L_2 en los puntos D , E y F respectivamente y L_3 en los puntos G , H e I respectivamente. Si $GH = 8(EF)$, $DE = 2(HI)$ y $BC = 3u$, entonces (en u) AB es:

A) 12

B) 3

C) 4

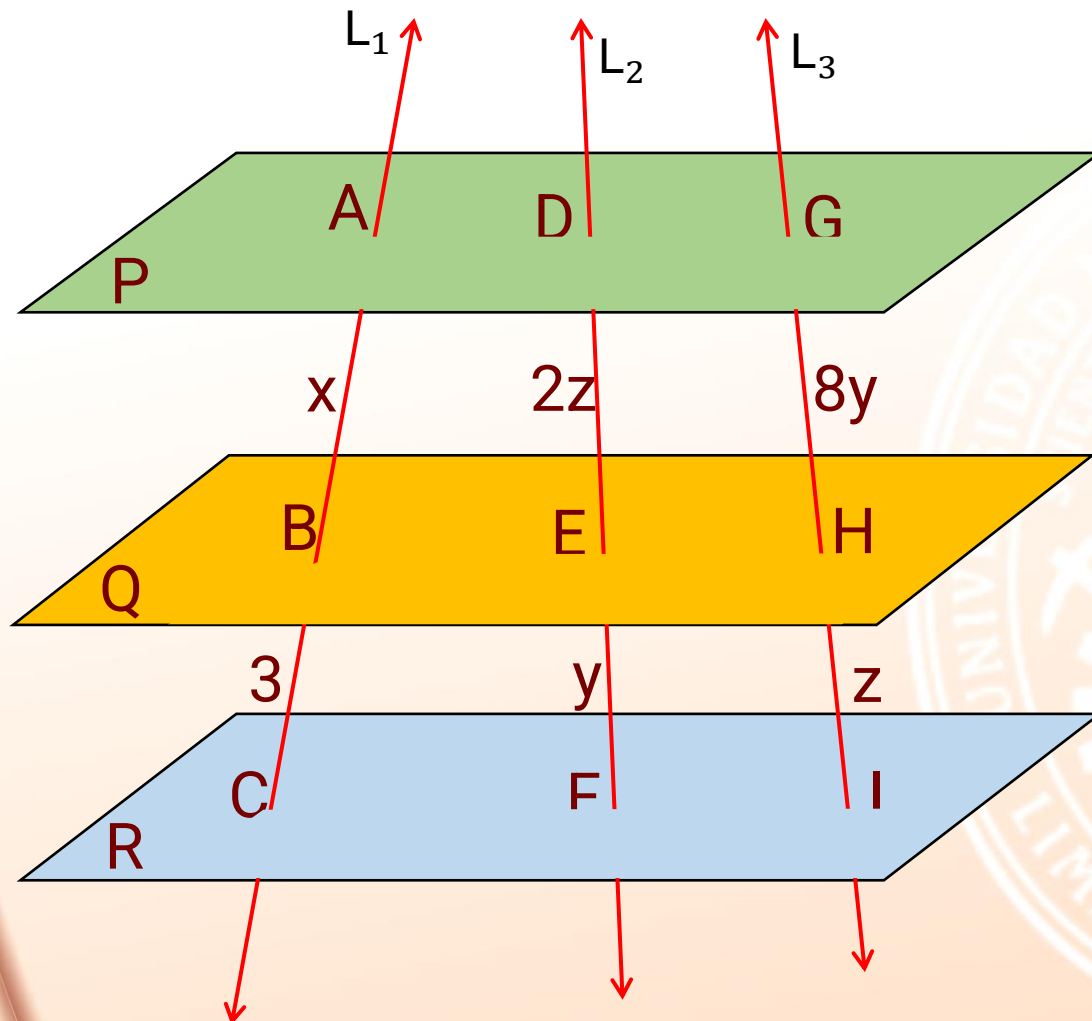
D) 6

E) 9

ce
pre
UNI

Resolución 04

Se tienen los planos paralelos P, Q y R. Se trazan las rectas L_1 , L_2 y L_3 secantes a dichos planos; L_1 interseca a P, Q y R en los puntos A, B y C respectivamente; L_2 en los puntos D, E y F respectivamente y L_3 en los puntos G, H e I respectivamente. Si $GH = 8(EF)$, $DE = 2(HI)$ y $BC = 3$ u, entonces (en u) AB es:



Teorema de Thales:

$$\frac{2z}{y} = \frac{8y}{z}$$

resolviendo: $z = 2y$

Teorema de Thales:

$$\frac{x}{3} = \frac{2z}{y}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{2(2y)}{y}$$

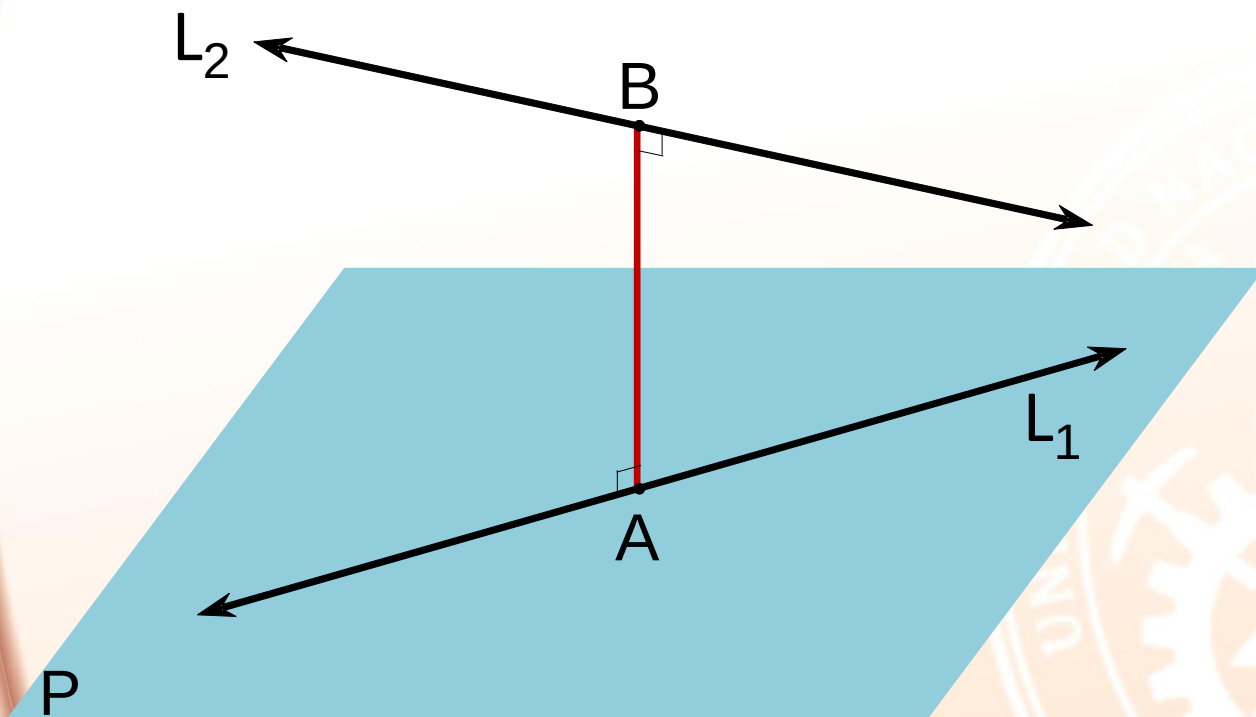
$$\frac{x}{3} = \frac{4y}{y}$$

$$\therefore x = 12$$

Clave: A

DISTANCIA ENTRE RECTAS CRUZADAS

Definición. La distancia entre dos rectas cruzadas, es la longitud del segmento perpendicular a ambas y con extremos en cada una de ellas.



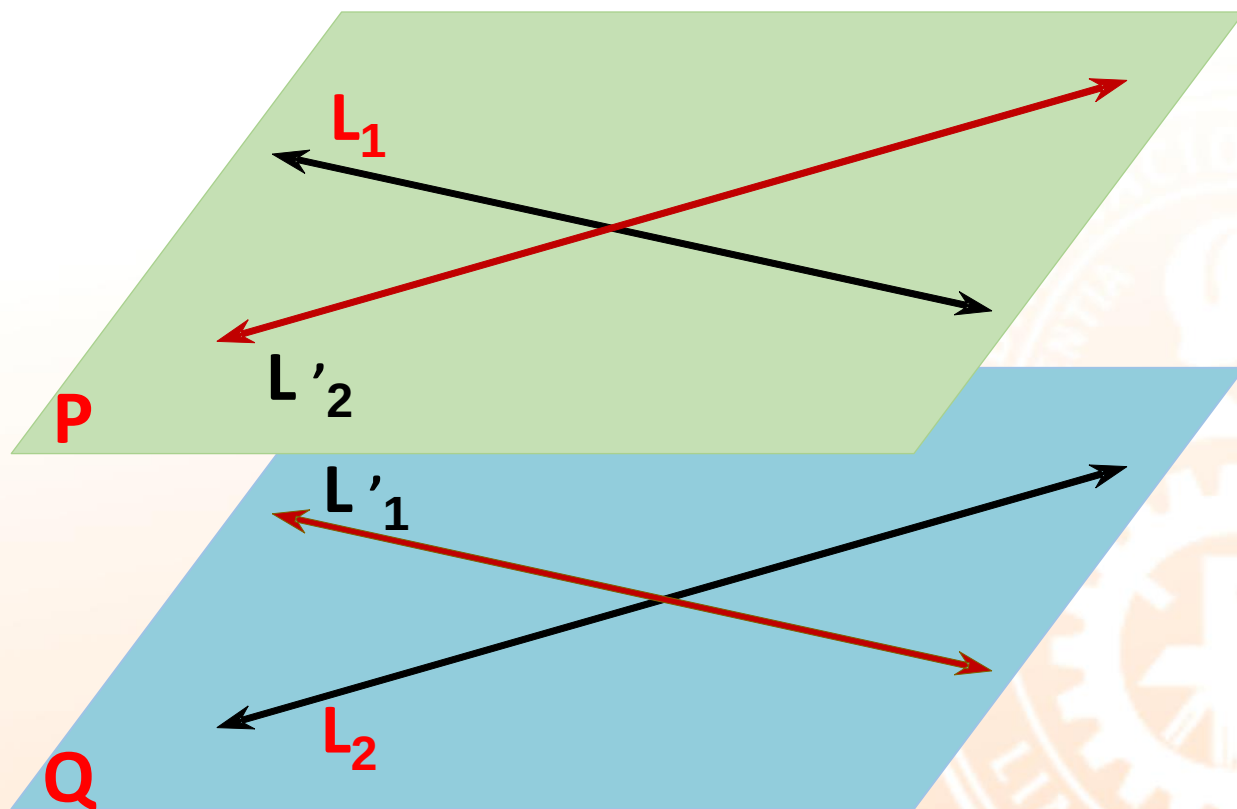
L_1 y L_2 , son rectas cruzadas. $L_1 \subset P$
 $\overline{AB} \perp L_1 \wedge \overline{AB} \perp L_2$

$A \in L_1 \wedge B \in L_2$

AB , es la distancia entre L_1 y L_2 .

TEOREMA

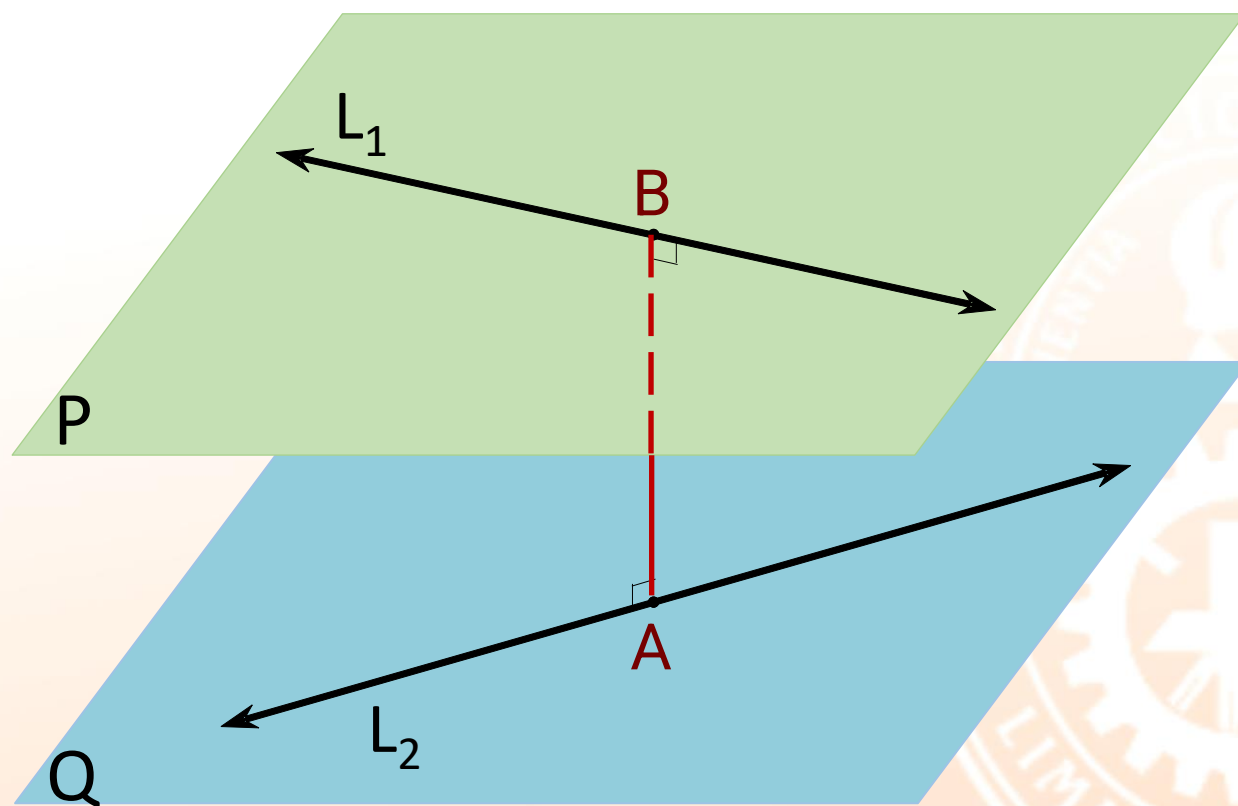
Dadas dos rectas cruzadas, existen dos planos paralelos entre sí, que contienen, cada uno, a dichas rectas.



Sean L_1 y L_2 , rectas cruzadas
 $L_2 \subset Q$
 $L'_1 // L_1 \wedge L'_1 \subset Q$
 $\Rightarrow Q // L_1$
 $L'_2 // L_2 \wedge \{L_1, L'_2\} \subset P$
 $\Rightarrow P // L_2$
 $\therefore P // Q$

TEOREMA

La distancia entre dos rectas cruzadas es igual a la distancia entre los planos paralelos que las contienen.



Sean L_1 y L_2 , rectas cruzadas
 $L_1 \subset P$,
 $L_2 \subset Q$
 $P \parallel Q$

$$d(L_1; L_2) = d(P; Q) = AB$$

EJERCICIO 05

Indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

- I. La distancia entre dos rectas cruzadas es el segmento perpendicular a ambas rectas.
- II. La distancia entre dos rectas cruzadas es la distancia entre dos planos paralelos que las contienen.
- III. Las proyecciones de dos rectas cruzadas sobre un plano, son paralelas.

A) VVF

B) FFV

C) FVF

D) VVV

E) FFF

RESOLUCIÓN 05

Indique el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

- I. La distancia entre dos rectas cruzadas es el segmento perpendicular a ambas rectas.
- II. La distancia entre dos rectas cruzadas es la distancia entre dos planos paralelos que las contienen.
- III. Las proyecciones de dos rectas cruzadas sobre un plano, son paralelas.

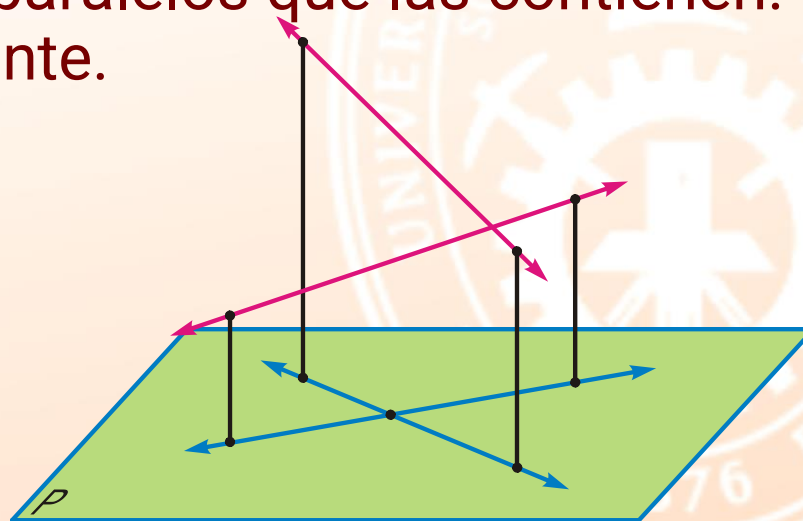
- I. Los extremos de dicho segmento deben pertenecer, uno a cada recta.

FALSO

- II. Teorema: La distancia entre dos rectas cruzadas es igual a la distancia entre los planos paralelos que las contienen. **VERDADERO**

- III. No necesariamente.

FALSO

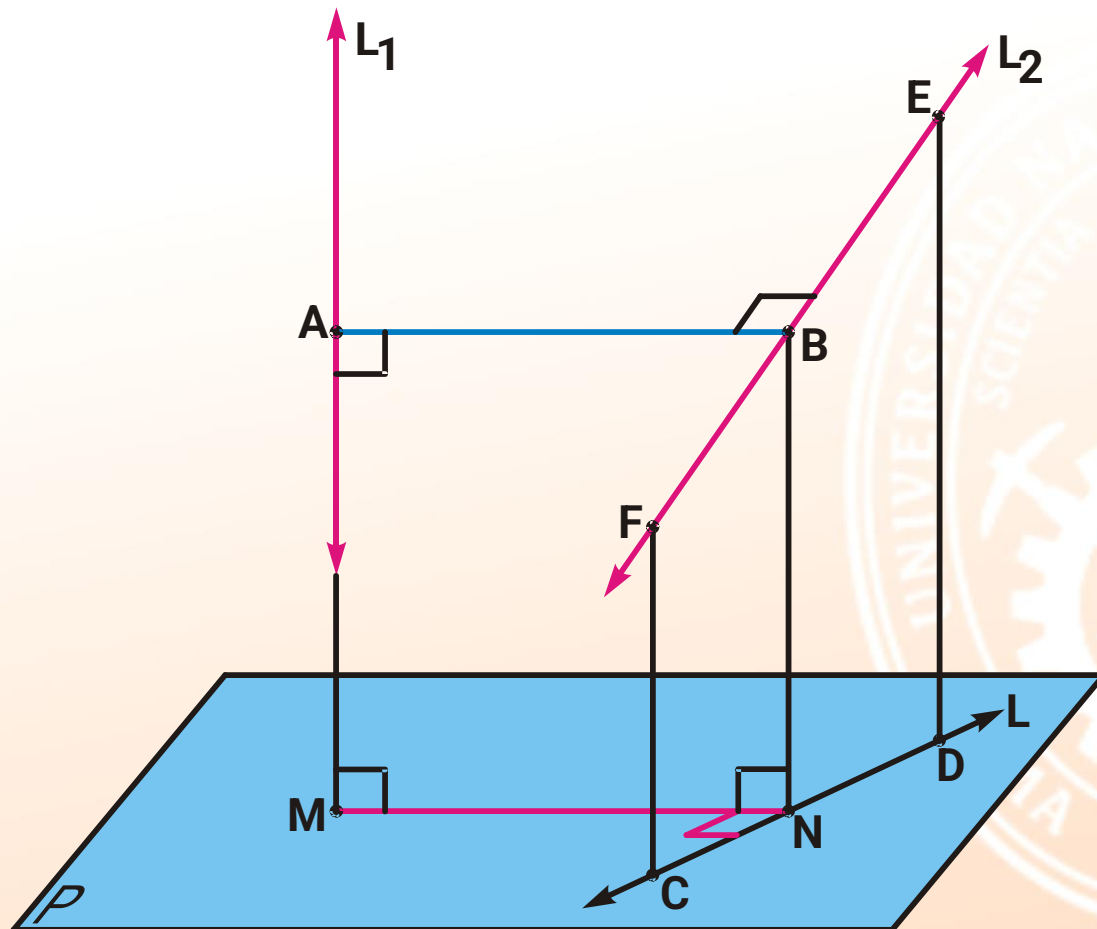


Rpta: FVF

Clave: C

TEOREMA

Si se proyecta una, de dos rectas cruzadas, en un plano perpendicular a la otra, entonces la distancia entre dichas rectas, es igual a la distancia entre el punto en que la segunda recta interseca al plano y la proyección de la primera recta.



L_1 y L_2 , rectas cruzadas

AB: distancia entre L_1 y L_2

$L_1 \perp P$

$L_1 \cap P = \{M\}$

$L = \text{Proy}_P L_2$

Distancia entre L_1 y L_2 :

$d(L_1; L_2) = AB = d(M; L) = MN$

EJERCICIO 06

Por el vértice B de un cuadrado ABCD, se traza $\overline{BM}$ perpendicular al plano que lo contiene. Si $BM = 4\text{ u}$ y $AD = 2\sqrt{2}\text{ u}$, entonces la distancia (en u) entre las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{DM}$ es

A) 1,0

B) $\sqrt{2}$

C) 1,5

D) 2,0

E) $2\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN 06

Por el vértice B de un cuadrado ABCD, se traza $\overline{BM}$ perpendicular al plano que lo contiene. Si $BM = 4$ u y $AD = 2\sqrt{2}$ u, entonces la distancia (en u) entre las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{DM}$ es

Distancia entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{DM} = ?$

ABCD, cuadrado: $AO = OC = OB = OD = 2$

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Trazamos $\overline{DL} \parallel \overline{BM}$ y $DL = BM = 4$

$\overline{AC} \perp \square P$

O : proyección de $\overleftrightarrow{AC}$ sobre P.

$\overleftrightarrow{DM}$: proyección de $\overleftrightarrow{DM}$ sobre P.

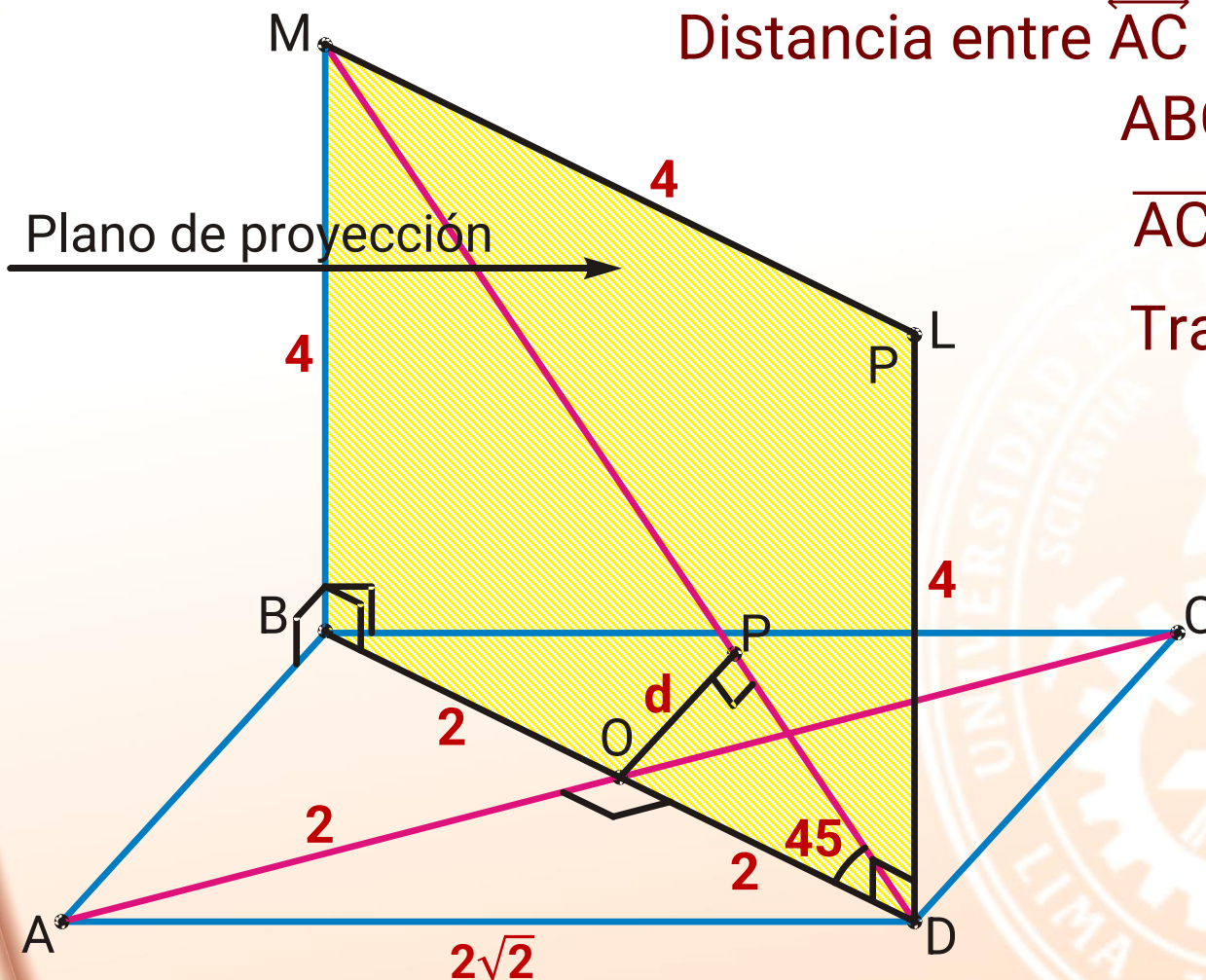
$d(\overleftrightarrow{AC}; \overleftrightarrow{DM}) = d(O; \overleftrightarrow{DM}) = OP = d$

BMLD: cuadrado

$\triangle OPD$: notable de 45 y 45

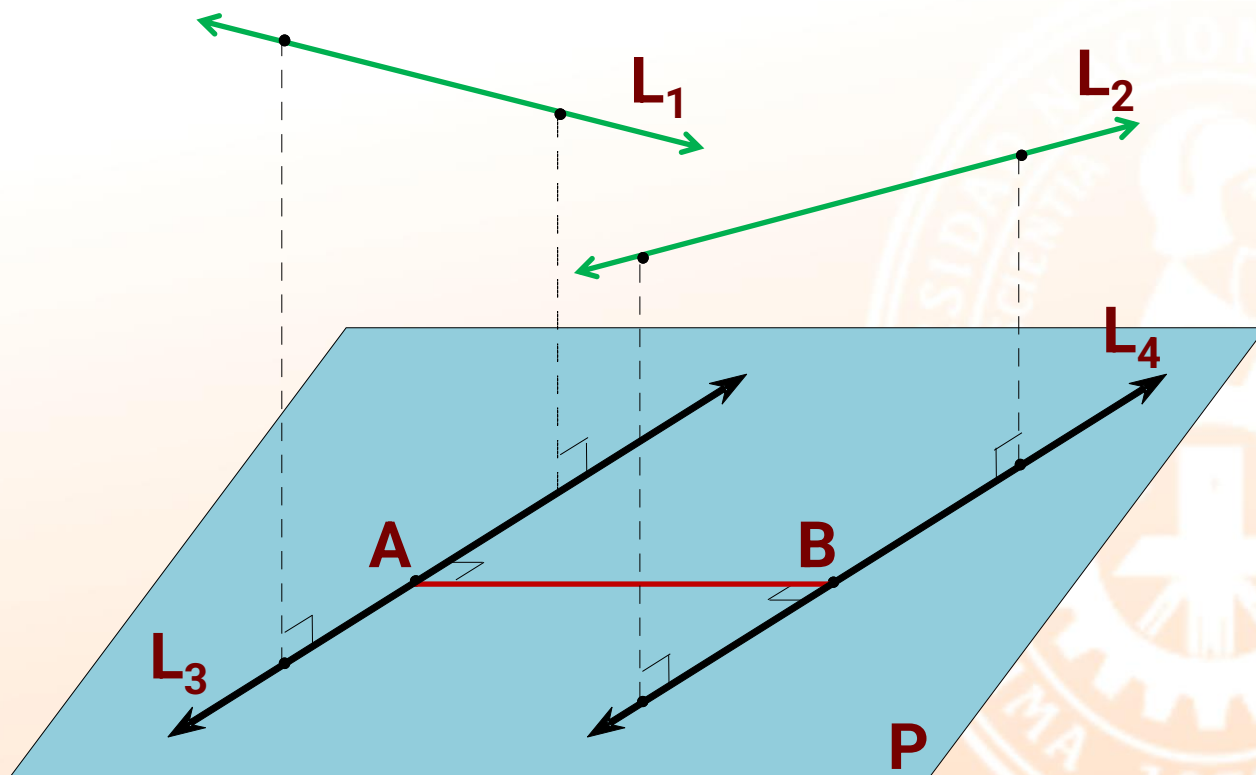
$\therefore d = \sqrt{2}$

Clave: B



TEOREMA

Si las proyecciones de dos rectas cruzadas en un plano, son paralelas, entonces la distancia entre dichas rectas cruzadas, es igual a la distancia entre las proyecciones.



L_1 y L_2 , rectas cruzadas;

L_3 : $\text{Proy}_P L_1$,

L_4 : $\text{Proy}_P L_2$

$L_3 \parallel L_4 \Rightarrow$ distancia entre
 L_1 y L_2 , es

$$d(L_1; L_2) = d(L_3; L_4) = AB$$

EJERCICIO 07

Dado el cuadrado ABCD, en un mismo semiespacio determinado por el plano que lo contiene, se ubican los puntos P y Q, tal que $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ sean perpendiculares a dicho plano. Si M es punto medio de $\overline{DC}$ y $AB = BP = 2(CQ) = 4$ u, entonces la distancia (en u) entre $\overleftrightarrow{PD}$ y $\overleftrightarrow{QM}$ es

A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{3}$

D) 4

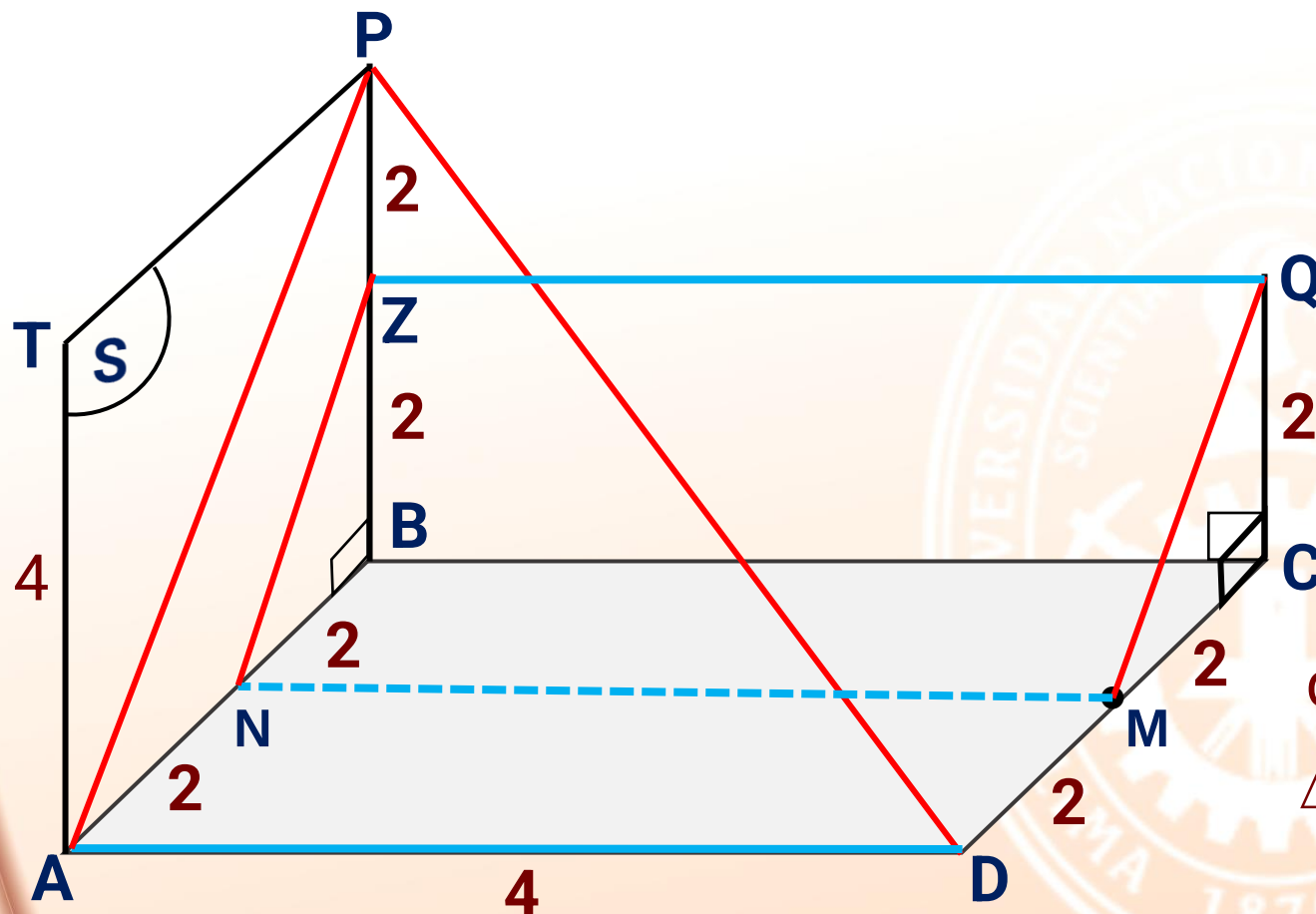
E) $\sqrt{5}$

RESOLUCIÓN 07

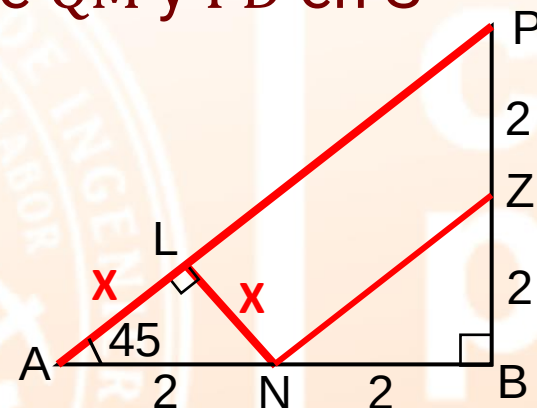
$$d(\overrightarrow{PD}; \overrightarrow{QM}) = x$$

ABPT: cuadrado

Dado el cuadrado ABCD, en un mismo semiespacio determinado por el plano que lo contiene, se ubican los puntos P y Q, tal que $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ sean perpendiculares a dicho plano. Si M es punto medio de $\overline{DC}$ y $AB = BP = 2(CQ) = 4$ u, entonces la distancia (en u) entre $\overrightarrow{PD}$ y $\overrightarrow{QM}$ es



S: Plano de proyección
trazamos las proyecciones
de $\overline{QM}$ y $\overline{PD}$ en S



$$d(\overline{QM} \text{ y } \overline{PD}) = d(N; \overline{AP}) = NL = x$$

$\triangle ALN$: notable de 45 y 45

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

Clave: B